13 Extremwerte bei Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen

13.1 Extremwerte bei zwei unabhängigen Variablen

1. Untersuche die Funktion $z = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 48x$ auf Extremwerte.

2. Untersuche die Funktion $z = 2x^2y + 2xy^2 + 2xy + \frac{2}{3}y^3 + y^2 - 4y$ auf Extremwerte.

3. Für ein Unternehmen, das zwei Güter in den Mengen x_1 und x_2 herstellt, gilt die Gewinnfunktion
$$G(x_1, x_2) = 14x_1 + 28x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 .$$
Bestimme den Produktionsplan mit höchstem Gewinn.

4. Untersuche die Funktion $z(x, y) = x^4 - 4x^2 + y^2 + 6y + 13$ auf Extremwerte.

5. Eine Funktion $z = f(x, y)$ wird auf Extremwerte untersucht. An den Stellen **A**, **B**, **C**, **D**, **E** verschwinden die beiden partiellen Ableitungen 1. Ordnung. Welche Folgerung ergibt sich jeweils bei den genannten Bedingungen?

   A) $f''_{xx} < 0$; $f''_{yy} < 0$; $f''_{xx} \cdot f''_{yy} > (f''_{xy})^2$;

   B) $f''_{xx} > 0$; $f''_{yy} > 0$; $f''_{xx} \cdot f''_{yy} = (f''_{xy})^2$;

   C) $f''_{xx} > 0$; $f''_{yy} < 0$; $f''_{xx} \cdot f''_{yy} > (f''_{xy})^2$;

   D) $f''_{xx} < 0$; $f''_{yy} > 0$; $f''_{xx} \cdot f''_{yy} < (f''_{xy})^2$;

   E) $f''_{xx} > 0$; $f''_{yy} > 0$; $f''_{xx} \cdot f''_{yy} > (f''_{xy})^2$.

6. Untersuche die Funktion $z = x^3 - 27x - 4y + y^2$ auf Extremwerte.

13.2 Extremwerte unter Nebenbedingungen

1. Untersuche die Funktion $z = x^2 + 2xy$ unter der Nebenbedingung $y = -1{,}5x + 6$ auf Extremwerte **a)** mittels des Ansatzes von Lagrange, **b)** durch Substitution.
2. Bestimme die Stellen, an denen Extremwerte der Funktion $f(x,y) = 3xy$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 18$ liegen können.
3. Bestimme die Stellen, an denen die Funktion $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ Extremwerte unter der Nebenbedingung $2x + 2y + 2z = 18$ haben kann. Verwende die Methode der Lagrangschen Multiplikatoren und interpretiere den Lagrangschen Multiplikator.
4. Untersuche die Funktion $z = 4x^3 + xy - y + 2$ auf Extremwerte unter der Nebenbedingung $y = xy + 3x$.

13.3 Ökonomische Anwendungen

1. Ein Betrieb hat folgende Produktionsfunktion: $x = 20r_1^{0,25}r_2^{0,75}$. Die Faktorpreise betragen $q_1 = 4$ und $q_2 = 12$. Welche Mengen der Produktionsfaktoren soll man einsetzen, damit die Menge $x = 80$ zu minimalen Kosten produziert wird?
2. Ein Fabrikant möchte Blechcontainer zur Abfallbeseitigung herstellen. Die Grundfläche soll quadratisch sein, die Seitenwände stehen senkrecht auf der Grundfläche. Der Container ist oben offen und soll $4m^3$ fassen. Welche Maße müssen für Kantenlänge a der Grundfläche und Höhe h des Containers gewählt werden, wenn der Blechverbrauch zu seiner Herstellung minimal sein soll?

   a) Formuliere die Aufgabe als Extremwertproblem und gib in Stichworten zwei verschiedene Lösungsmethoden an!

   b) Löse das Problem durch Substitution.
3. Es wird ein Produktionsprozeß betrachtet, bei dem ein Gut mit zwei Produktionsfaktoren r_1 und r_2 hergestellt wird.
   Die Produktionsfunktion lautet: $x = 5r_1^2r_2$.
   Die Kosten werden gegeben durch $K = 6r_1 + 12r_2$.
   Bestimme die Minimalkostenkombination für eine Produktion von 80 Einheiten des Gutes. Um welchen Betrag ändern sich näherungsweise die Kosten der Minimalkostenkombination, wenn die Produktionsmenge x um eine Einheit geändert wird?

4. Aus einem Kreis mit dem Radius r soll ein Rechteck maximaler Fläche ausgeschnitten werden. Bestimme die Abmessungen des Rechtecks.

5. Ein Betrieb hat die Produktionsfunktion $x = 20r_1^{0,2}r_2^{0,8}$. Die Faktorpreise betragen $q_1 = 3$ und $q_2 = 12$. Welche Mengen der Produktionsfaktoren soll man einsetzen, damit die Menge $x = 100$ zu minimalen Kosten produziert wird?

6. Ein Unternehmer hat 2 voneinander unabhängige Fertigungsbetriebe. Der Gewinn in jedem Betrieb (G_1 bzw. G_2) ist eine Funktion des eingesetzten Kapitals (x_1 bzw. x_2). Es gilt $G_1 = 120\sqrt{x_1}$ EUR und $G_2 = 160\sqrt{x_2}$ EUR. Die gesamte verfügbare Kapitalmenge beträgt 4.000.000 EUR. Wie ist die Kapitalmenge auf die Betriebe aufzuteilen, um einen maximalen Unternehmensgewinn zu erzielen? Wie groß ist der zusätzliche Gewinn, wenn eine zusätzliche EUR Kapital eingesetzt wird?

7. Für die Fertigung eines Produktes X (in der Menge x) werden zwei Produktionsfaktoren A (in der Menge a) und B (in der Menge b) eingesetzt. Die zugehörige Produktionsfunktion ist:

$$x = f(a, b) = 10 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Der Gewinn der Unternehmung ergibt sich aus der Funktion $G = 9x - a - 4b$. Berechne diejenige Kombination der Produktionsfaktoren, die den Gewinn der Unternehmung maximiert. Verwende die Lagrangesche Multiplikatorregel.

8. Ein Unternehmen hat folgende Produktionsfunktion: $x = 5\sqrt{r_1 r_2}$. Die Faktorpreise lauten $q_1 = 2$ und $q_2 = 8$.
   a) Bestimme die Minimalkostenkombination der Produktionsfaktoren für die Produktionsmenge $x = 40$.
   b) Wie lauten die Grenzkosten bezüglich x bei Realisierung der Minimalkostenkombination?
   c) In welcher Beziehung stehen Isoquante und Isokostengerade an der Stelle der Minimalkostenkombination zueinander?

9. Ein Bauer hat 37 ha Fläche, und zwar Wiese (f_1) für die k Kühe und Getreideanbaufläche (f_2). Je Kuh benötigt er 4 ha, je Tonne Getreide (g) 1 ha. Der Gewinn ergibt sich als
$G(k, g) = 6k + 2gk$.
   a) Ermittle mittels der Lagrangeschen Multiplikatorregel die optimale Aufteilung der Fläche.
   b) Um wieviel GE steigt der Gewinn, wenn der Bauer 1 ha dazu kauft?